第 15 講　最大・最小

15

［A］ xy 平面上を速さ 1 で自由に動くことのできる点 P があって，直線 $y=\sqrt{3}x$ 上を動くときのみ速さ 2 で動くことができる．このとき，動点 P が原点 O を出発して，点 $\mathrm{A}(2,\ \sqrt{3})$ に至るまでの最小時間を求めよ．

［B］ α，β，γ は $\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ を満たすものとする．このとき，$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ の最大値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　最大・最小

15 座標空間内に4点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(-\cos\alpha,\ 0,\ \sin\alpha)$，D$(0,\ -\cos\beta,\ -\sin\beta)$ がある．ただし，$0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) 四面体 ABCD の体積 V を α，β を用いて表せ.

(2) $\alpha=\beta$ を満たしながら2点 C，D が動くとき，V の最大値を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　最大・最小

15

［A］ xy 平面上を速さ1で自由に動くことのできる点Pがあって，直線 $y=\sqrt{3}x$ 上を動くときのみ速さ2で動くことができる．このとき，動点Pが原点Oを出発して，点 $A(2,\ \sqrt{3})$ に至るまでの最小時間を求めよ．

［B］ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は $\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,\ \alpha+\beta+\gamma=\pi$ を満たすものとする．このとき，$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ の最大値を求めよ．

【答】 ［A］ 2

［B］ $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

【解説】

［A］ $y=\sqrt{3}x$ 上を原点Oから t 秒間移動した点をQとすると

$$Q(t,\ \sqrt{3}t)$$

であり，Aに至るまでの時間は

$$t+\sqrt{(2-t)^2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}t)^2}$$
$$=t+\sqrt{4t^2-10t+7}$$

となるので，これを $f(t)$ とおく．

$$f'(t)=1+\frac{4t-5}{\sqrt{4t^2-10t+7}}$$
$$=\frac{\sqrt{4t^2-10t+7}+4t-5}{\sqrt{4t^2-10t+7}}$$

(Ⅰ) $4t-5\geqq 0$ つまり $t\geqq\dfrac{5}{4}$ のとき $f'(t)>0$ となる．

(Ⅱ) $4t-5<0$ つまり $0<t<\dfrac{5}{4}$ のとき

$$f'(t)=\frac{-6(t-1)(2t-3)}{\sqrt{4t^2-10t+7}\{\sqrt{4t^2-10t+7}-(4t-5)\}}$$

よって $0<t<1$ のとき $f'(t)<0$，$1<t<\dfrac{5}{4}$ のとき $f'(t)>0$ となる．

(Ⅰ)(Ⅱ)より $f(t)$ の増減は

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	0	↘	最小	↗

となるので最小時間は

$$f(1)=1+\sqrt{1}=\mathbf{2}$$

［B］ $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$

この右辺を α の関数とみて $f(\alpha)$ とおくと，

$$\begin{aligned} f'(\alpha)&=\cos\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)\\ &=\sin\beta\sin(2\alpha+\beta) \end{aligned}$$

ここで $\sin\beta>0$ より $f(\alpha)$ の増減は

α	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi-\beta}{2}$	$\cdots$	π
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$		↗		↘	

となるので $\alpha=\dfrac{\pi-\beta}{2}$ のとき最大値

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi-\beta}{2}\right)&=\sin\frac{\pi-\beta}{2}\sin\beta\sin\frac{\pi+\beta}{2}\\ &=\sin\beta\cos^2\frac{\beta}{2}\\ &=\frac{1}{2}\sin\beta(1+\cos\beta) \end{aligned}$$

次に $g(\beta)=\dfrac{1}{2}\sin\beta(1+\cos\beta)$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(\beta)&=\frac{1}{2}(\cos\beta+\cos 2\beta)\\ &=\frac{1}{2}(2\cos\beta-1)(\cos\beta+1) \end{aligned}$$

より $g(\beta)$ の増減は

β	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$g'(\beta)$		$+$	0	$-$	
$g(\beta)$		↗		↘	

となるので $\beta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大値

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{8}}$$

をとる．このとき $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　最大・最小

15　座標空間内に4点 A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C($-\cos\alpha$, 0, $\sin\alpha$), D(0, $-\cos\beta$, $-\sin\beta$) がある．ただし，$0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1)　四面体 ABCD の体積 V を α，β を用いて表せ.

(2)　$\alpha=\beta$ を満たしながら2点 C，D が動くとき，V の最大値を求めよ.

【答】 (1) $V=\dfrac{1}{6}\{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)\}$　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

【解説】

(1)　この四面体を xy 平面で2つの部分に分けて考える．CD 上の点は

$$(1-t)(-\cos\alpha,\ 0,\ \sin\alpha)+t(0,\ -\cos\beta,\ -\sin\beta)$$
$$=((t-1)\cos\alpha,\ -t\cos\beta,\ \sin\alpha-t(\sin\alpha+\sin\beta))$$

と表せるが，これが xy 平面上にあるとき

$$\sin\alpha-t(\sin\alpha+\sin\beta)=0$$
$$\iff\quad t=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}$$

よって CD と xy 平面との交点を E とすると

$$\mathrm{E}\left(\frac{-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta},\ \frac{-\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta},\ 0\right)$$

これを E($-a$, $-b$, 0) とおくと △ABE の面積は

$$(1+a)(1+b)-\frac{1}{2}a(1+b)-\frac{1}{2}b(1+a)-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(1+a+b)$$

つまり

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}\right)$$

となる．これを S とおくと，2つの部分の和 V は

$$V=S\cdot\sin\alpha\cdot\frac{1}{3}+S\cdot\sin\beta\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{3}S(\sin\alpha+\sin\beta)$$
$$=\frac{1}{6}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}\{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)\}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$\alpha=\beta=x$ とおくと

$$V=\frac{1}{6}(2\sin x+\sin 2x)$$

ここで $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x)&=2\cos x+2\cos 2x \\ &=2(2\cos x-1)(\cos x+1) \end{aligned}$$

より $0<x\leqq\frac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

となり $x=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

をとるので V の最大値は

$$\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}\sqrt{3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。